

Estratto di Matematica

Per ricordare insieme la giornata in cui si è parlato di matematica al corso di pedagogia 2009 presso la scuola Janua.

In sintesi, il lavoro verrà diviso in tre parti.

1. **“La scrittura dei numeri nelle diverse civiltà”**

Un documento a carattere storico che mostra i diversi tipi di scrittura: la scrittura posizionale (es. decimale), quella additiva (Egizio) e quella mista (Sumerico, Maya). I diversi tipi di “base” usati nella storia umana (base 2 della tribù australiana, base 60 degli Indiani e base 20 dei Maya). E mostra quindi i codici, o meglio “gli alfabeti numerici”.

2. **“I Quesiti dello zero”**

Un documento a carattere filosofico rivolto al futuro che ci interroga sull'infinito e sul nulla a partire dall'osservazione dello zero nelle diverse operazioni comprese quelle di elevazione a potenza negativa.

3. **“Il triangolo di Tartaglia come aiuto ad esercitare l'algebra”**

Un documento più tecnico sull'intuizione di Tartaglia per lo svolgimento dell'elevazione a potenza di un binomio, a partire da $(a+b)^2$

Domande rimaste in sospeso:

1. Come l'uomo ha imparato a contare?
(es. la giara con i sassolini per contare le pecore)
2. Il passaggio dal due al TRES (molto)
3. Come percepiscono gli animali
4. Perché il sistema decimale è migliore di uno sessagesimale? Perché ancora oggi il tempo è misurato su scala sessagesimale?
5. Cos'è lo “Zero operatore” in Astronomia?
6. Come portare lo zero ai bambini? A che età? Parlargli della differenza tra zero posizionale e zero numerico? Farli contare a partire da zero o da uno?

La scrittura dei numeri nelle diverse civiltà

Questa è una tabella TEMPORALE riassuntiva, che mi sono appuntato durante la ricerca, a partire dai primissimi cenni delle popolazioni Paleolitiche nella capacità di contare fino al primo calcolatore elettronico (funzionante) che in contava in modo binario.

- "Ossi numerici" – 30.000 anni fa [Paleolitico Superiore → Aurignaziano]
- "Corno di renna" – 15.000 a.C. [Paleolitico Superiore → Magdaleniano]
- Gumulgal australiani, contavano in base 2 – Neolitico
 - 1 = urapon
 - 2 = ukasar
 - 3 = ukasar-urapon
 - 4 = ukasar-ukasar
 - 5 = ukasar-ukasar-urapon
- La scrittura – Mesopotamia – 3.300 a.C.
- Numerazione Geroglifica – Egitto – 3.000 a.C.
- "Chiodo e Cuneo" – Mesopotamia – 2.400 a.C.
- Pari e Dispari – Grecia – Pitagorici – V-VI a.C.
- "Cordicelle a Nodi" – Persia di Dario – V secolo a.C.
- Invenzione delle Cifre 1...9 – India – III sec a.C.
- GOLGOTA
- "Invenzione della Carta" – Cina – II sec d.C.
La Memoria del Calcolo
- Numerazione Posizionale con lo zero – India – V sec d.C.
- "Quipo" – Incas – XIII secolo d.C (Tecnica perfezionate delle cordicelle)
Sistema di numerazione concreto ma Posizionale!
- Gli Arabi pubblicano un libro sulla numerazione Indiana – IX sec d.C.
- Baskara parla della divisione per zero – India – XII sec d.C.
- Fibonacci porta la numerazione indo-araba in Europa – XIII sec. d.C.
- Lotte tra abacisti e algoritmisti – Alto Medioevo
- "Cartografie Corporee" per contare e "Grammatiche Gestuali"
 - In Cina nel XVI secolo d.C. Con due mani contavano fino a un miliardo
- 1700 – Leibniz parla della numerazione binaria
- XIX secolo – definizione matematica di infinito
- 1937 – Z1 – computer meccanico basato sul sistema binario

Un po di Concetti di base:

Prima di raccontare dei numeri Egizi, Sumeri e Maya rievichiamo insieme qualche concetto fondamentale.

Oggi come oggi i numeri sono all'ordine del giorno quindi tendiamo spesso a scordare che esistono diversi aspetti legati al concetto di numero. Ad esempio la quantità non ha nulla a che vedere con il concetto di successione.

Ricordiamo quindi che si parla di Numeri Cardinali quando indicano una quantità nella serie naturale (uno, due, quattro, tre, sette...).

I Numeri Ordinali invece, includono in loro stessi un concetto più ampio, definiscono un ORDINE (primo, secondo, terzo... quarto, ecc...)

Alcune popolazioni avevano il concetto di quantità ma non di successione. Senza il concetto di numero puro, non si può avere il concetto di Successione. Ci siamo mai chiesti "Perché" mai il quattro dovrebbe venire dopo il due?

Una numerazione, è un sistema più o meno complesso, messo in atto da una popolazione per "**esprimere i numeri**" e possibilmente alcune operazioni che si possono effettuare con essi. È una esigenza che molte popolazioni, anche separate geograficamente, hanno dovuto "inventare" per evolvere.

Nelle numerazioni, possiamo individuare tre aspetti di rappresentazione (Visiva, Orale e Scritta) e una capacità/necessità di Calcolo.

Ovviamente si può rappresentare senza calcolare, ma non si può calcolare senza rappresentare. Non tutti i popoli infatti avevano sviluppato il Calcolo.

Ma come sono fatte queste numerazioni?

La più semplice che ci può venire in mente è quella Additiva, ossia se uno è rappresentato con un simbolo I, il due sarà II, il tre III, il 4 IIII ecc...

Chiaramente per l'impossibilità di rappresentare numeri molto grandi con un solo simbolo, nasce in molte popolazioni l'esigenza di inventare più simboli, ognuno dei quali ha un valore diverso dagli altri, ma sempre e solo lo stesso valore, in qualsiasi posizione esso venga messo. Ad esempio gli antichi romani usavano i simboli IVXLCDM uno, cinque, dieci, cinquanta, cento, cinquecento, mille...

Attenzione che anche se IX in numeri romani significa 9, questo non la rende una scrittura di tipo posizionale, in questo caso I significa meno uno.

Il concetto di numerazione Posizionale è legato al concetto di "**base**".

Ci sono popolazioni che nella storia hanno adottato numerazioni posizionali in base 10, 12, 20 (vigesimali), 60 (sessagesimale) o 2 (binaria).

Nel nostro sistema di numerazione usiamo la base 10 (decimale)

Abbiamo delle cifre 1234567890 che singolarmente rappresentano i valori unitari. Queste prendono valore diverso a seconda della posizione all'interno della rappresentazione (unità, centinaia, migliaia, ecc...)

| | |
|-----------|----------------------------------|
| unità | $= \text{cifra} * \text{base}^0$ |
| decine | $= \text{cifra} * \text{base}^1$ |
| centinaia | $= \text{cifra} * \text{base}^2$ |
| migliaia | $= \text{cifra} * \text{base}^3$ |

Il sistema posizionale, abbandona completamente il concetto di numerazione additiva. 44 non è "otto" bensì "quarantaquattro".

Il nostro sistema di numerazione proviene dagli indiani/persiani.

Attenzione però che quando si parla di numerazione decimale, non si parla necessariamente di numerazione posizionale, infatti la numerazione Geroglifica Egizia è solamente additiva ma è chiaramente decimale poiché i simboli valgono: uno, dieci, cento, mille, diecimila, centomila e un milione. In essa il concetto di base non c'è.

Il concetto di Base è legato alla posizione. Quando si conta, arrivati al numero della base, si cambia posizione, l'unità ricominciano a contare da zero mentre si somma uno alle decine. Dopo il 9 si passa a 1 decina e zero unità. Dopo il 19 si passa a 2 decine e zero unità.

Mentre nel sistema egizio il numero 10 si scrive semplicemente con un altro simbolo.

Osservazione:

Nella numerazione posizionale, è possibile vedere a colpo d'occhio se un numero è più grande di un altro. Ne giova chiaramente la facilità nei calcoli.

Le numerazioni miste possiamo vederle come delle numerazioni additive che hanno "maturato" un concetto di base e quindi di posizione. Sono il primo passaggio evolutivo che una popolazione che usa il sistema additivo deve fare per arrivare ad una numerazione di tipo posizionale.

Nel sistema Maya, si conta in modo additivo fino alla base sessagesimale (60), poi si aggiunge uno alla "sessagina" (decina) successiva e si ricomincia a contare nelle unità.

Numerazione Parlata

Finora ho parlato di rappresentazione dei numeri, soffermandomi nello specifico alla scrittura. Non sempre, anzi quasi mai, la numerazione parlata corrisponde alla numerazione scritta. O meglio non corrisponde verbalmente soprattutto nelle prime decine. Ad esempio dodici, non è dieci-due.

Non si è mai sviluppato un calcolo con una numerazione orale, e in effetti non c'è una grande inventiva, a parte i primi numeri, i numeri più grandi sono dati dall'unione dei numeri più piccoli. Diciotto è l'unione di dieci e otto.

Dobbiamo però considerare che la lingua parlata, ha tantissime sfumature:

- **Numerali**: vocaboli scelti per identificare i numeri:
 - **Cardinali**: uno due tre
 - due cani (aggettivo)
 - ha preso un due in matematica (sostantivo)
 - **Ordinali**: Primo Secondo Terzo (sempre aggettivi)
 - **Distributivi**: a due a due (rappresentati da locuzioni)
 - **Collettivi**: Dozzina, Coppia, Paio (sostantivi)
 - **Moltiplicativi**: doppio, triplo, mezzo, quarto
 - serve una spesa tripla a quella prevista (aggettivo)
 - oggi mi costerebbe il doppio (sostantivo)

Oggi è facile giare tutto il mondo e scambiare merci, parlare e comprare perché il sistema numerico mondiale adottato è quello arabo/indiano/persiano.

Provate a immaginare di andare in Egitto e scambiare merci leggendo i numeri geroglifici. Una cosa è imparare a pronunciare i numeri in un'altra lingua, tutt'altro sarebbe studiare un'altra matematica.

Storia della scrittura

Sembrerebbe che la scrittura sia nata in Mesopotamia, in effetti oltre alla scrittura è nata lì anche la scrittura dei numeri.

Le esigenze di gestire i terreni, i prodotti, le mandrie e gli uomini, hanno fatto sì che nacque la "contabilità".

A Sumer, i Sumeri (una etnia Mesopotamica) inventarono un sistema di scrittura. Mentre Pittogrammi e Ideogrammi vennero trascritti in fonogrammi e pian piano scomparvero, i segni numerici divennero segni specifici riservati alla rappresentazione dei numeri. Nacquero quindi le CIFRE "chiodo/cuneo".

- Le Cifre:
 - "chiodo e cuneo" – Sumeri
 - "fiore di loto e rana" – Egizi
 - "punto, tratto e glifo" – Maya
 - 0-9 – Arabi

Numerazione Geroglifica

Decimale e additiva, segni per le prime 6 potenze del 10 (fino a un milione)



Corrisponde a 1.234.567



Il numero è un geroglifico egizio, corrisponde a **256**.

E' già, il geroglifico si legge a volte dall'alto in basso, a volte da destra a sinistra, o anche da sinistra a destra, ed questa la forma adottata nella stampa delle nostre grammatiche; se la scrittura è diretta da destra a sinistra i caratteri sono rivolti verso destra.

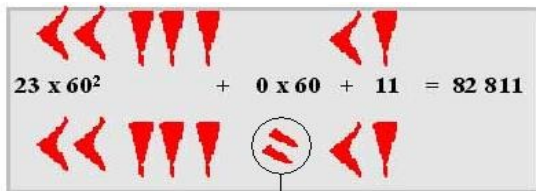
Numerazione Sumeri

Cifre: "chiodo e cuneo", in base sessagesimale. Numerazione Mista.



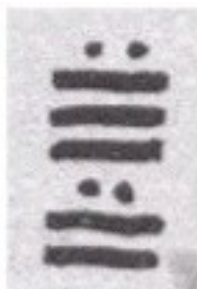
Il numero è cuneiforme della cultura dei Sumeri (Mesopotamia), corrisponde a **1999**
 33 a sinistra (decine / sessagine) e diciannove a destra (unita)
 quindi trentatré volte sessanta (la base) + diciannove
 $33 * 60 + 19 = 1980 + 19 = 1999$

| | | | | | | | | | | | |
|----|-----------|----|------------|----|-------------|----|--------------|----|---------------|----|----------------|
| 1 | 𐄂 | 11 | 𐄂𐄂 | 21 | 𐄂𐄂𐄂 | 31 | 𐄂𐄂𐄂𐄂 | 41 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 51 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 |
| 2 | 𐄂𐄂 | 12 | 𐄂𐄂𐄂 | 22 | 𐄂𐄂𐄂𐄂 | 32 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 42 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 52 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 |
| 3 | 𐄂𐄂𐄂 | 13 | 𐄂𐄂𐄂𐄂 | 23 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 33 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 43 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 53 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 |
| 4 | 𐄂𐄂𐄂𐄂 | 14 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 24 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 34 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 44 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 54 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 |
| 5 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 15 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 25 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 35 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 45 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 55 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 |
| 6 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 16 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 26 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 36 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 46 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 56 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 |
| 7 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 17 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 27 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 37 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 47 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 57 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 |
| 8 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 18 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 28 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 38 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 48 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 58 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 |
| 9 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 19 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 29 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 39 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 49 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | 59 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 |
| 10 | 𐄂 | 20 | 𐄂𐄂 | 30 | 𐄂𐄂𐄂 | 40 | 𐄂𐄂𐄂𐄂 | 50 | 𐄂𐄂𐄂𐄂𐄂 | | |



il simbolo dello zero, presso i Babilonesi, inteso come mancanza della cifra piuttosto che come numero a tutti gli effetti.

Numerazione Maya



Il numero è della cultura Maya, corrisponde a **352**
 Vediamo sopra c'è un diciassette (decine / ventine) sotto c'è un dodici.
 Quindi diciassette volte venti (la base) + dodici.
 $17 * 20 + 12 = 340 + 12 = 352$

| | | | | |
|----|----|-----|------|-------|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| ⊖ | • | •• | ••• | •••• |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| — | —• | —•• | —••• | —•••• |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| — | —• | —•• | —••• | —•••• |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| — | —• | —•• | —••• | —•••• |

Numerazione Antichi Romani

MDCCLXII

Il numero è scritto nel sistema di numerazione romano $1000+500+100+100+100+50+10+2=$
1862 .

Numerazione Cinese

一千四百九十九

Numero è scritto in cinese, si legge a coppie.
Il primo simbolo indica 1, il secondo 1000,
poi 4 e 100, 9 e 10, l'ultimo 9
si legge sì-qian yi-bai jiu-shì jiu" **1499**

Numeri arabi: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20 100 1000 10000

Carattere cinese: 一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 二十 百 千 万

Invece di usare la posizione (non hanno lo zero), si limitano a dire cosa stanno contando.
È come dire nella nostra numerazione,
una volta mille, quattro volte cento, nove volte dieci + 9
o potremmo scriverla: $1*1000 + 4*100 + 9*10 + 9$. I cinesi scrivono i numeri senza risolvere,
l'operazione.

Numerazione Greca

HHHΔΠIII

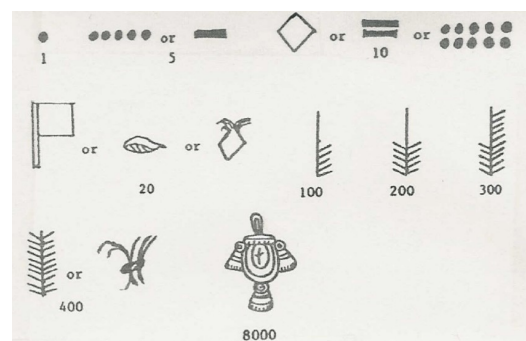
il numero è greco, è una numerazione additiva
corrisponde a $100+100+100+10+5+3=$ **318**

Numerazione Azteca

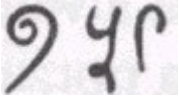


il numero e azteco, corrisponde a **9287**

$8.000 + 3*400 + 4*20 + 7$
Chiaramente è additiva.

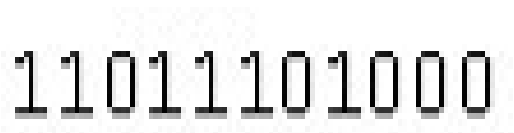


Numerazione di origine Indiana



il numero è di origine indiana, corrisponde a **947**

Numerazione Binaria



Il secondo numero è scritto nel sistema di numerazione binario e corrisponde a $0+0+0+8+0+32+64+128+0+512+1024=$ **1768** .

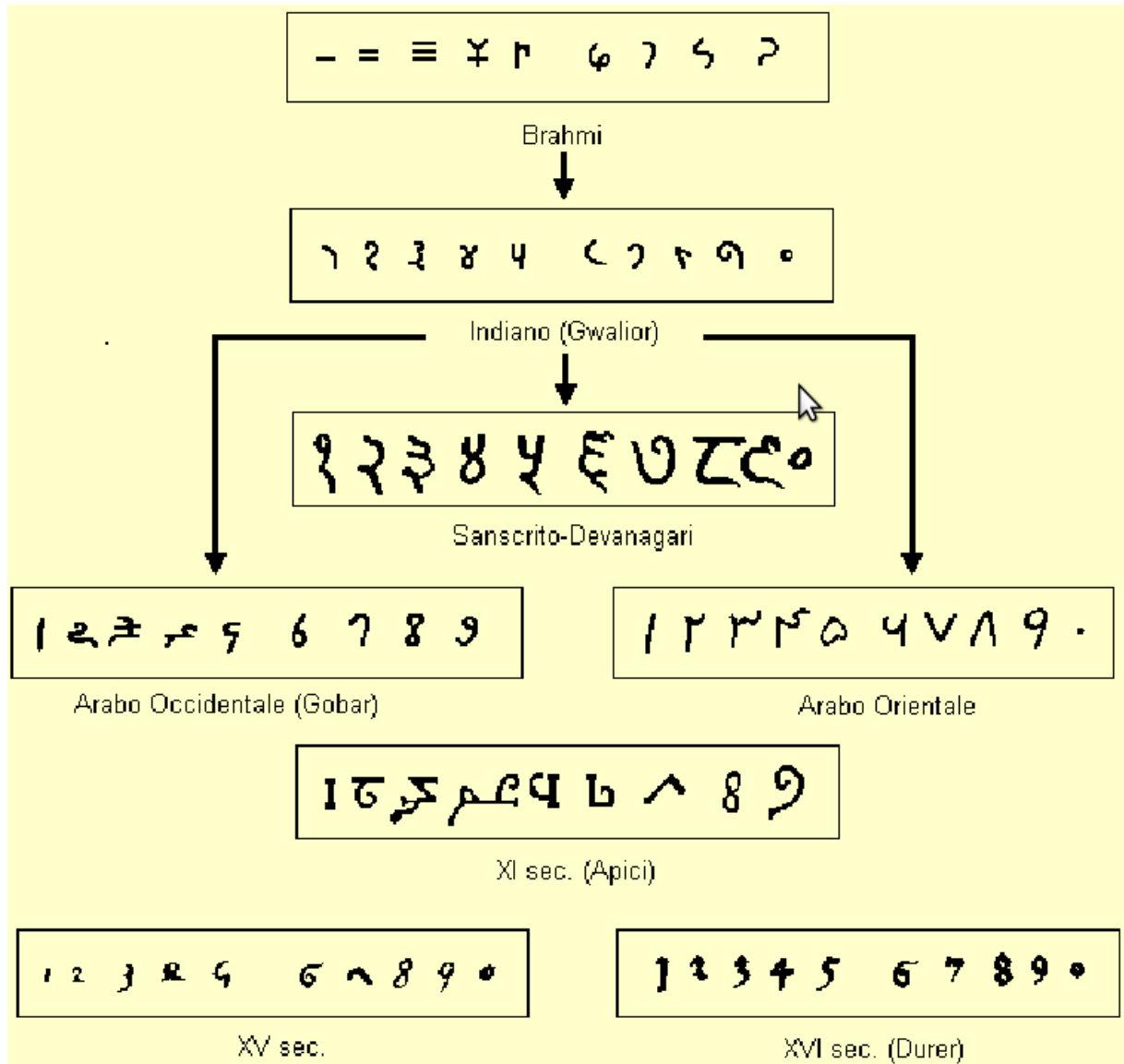
Numerazione Morse



Il numero è scritto in codice Morse e corrisponde a **1718** .

Storia della numerazione araba/indiana/persiana:

- il *Brahmi* è un arcaico linguaggio indiano del X sec. a.C.;
- l'*Indiano antico* si data intorno al VI sec. d.C.;
- il *Sanscrito-Devanagari* è un linguaggio indiano del VII-XII sec d.C.;
- l'*Arabo antico* risale al VIII-X sec. d.C.;
- i sistemi di numerazione che seguono si riferiscono all'Europa nei secoli sotto indicati.



I Quesiti dello zero

Impariamo a dividere in due lo zero, non in senso matematico, ma concettuale. Lo **zero posizionale** come "posizione vuota" (SEGNO o CIFRA) da scrivere per segnare l'assenza di valore in una specifica "posizione". Il **numero zero**, posto al centro della numerazione, che divide i numeri positivi da quelli negativi.

Lo zero ha dovuto faticare per diventare quello che è:

SEGNO → CIFRA → NUMERO

- I Sumeri scrivevano lo zero posizionale, con due chiodi trasversali. Mesopotamia – 2.400 a.C. (SEGNO)
- I Maya usavano una conchiglia per scrivere lo zero posizionale. Sud America V sec d.C (SEGNO)
- Numerazione Posizionale con lo zero – India – V sec d.C. (CIFRA)
 - Gli indiani hanno portato lo zero al centro della numerazione
 - I numeri negativi furono probabilmente introdotti per la prima volta in India allo scopo di registrare i debiti: i numeri positivi venivano indicati in rosso e quelli negativi in nero.
- Baskara parla della divisione per zero – India – XII sec d.C. (NUMERO)
- Fibonacci porta in Europa la numerazione Indiana XIII d.C. (NUMERO)
- La resistenza dell'occidente. Il "terror vacui". (NUMERO)

In tutte le numerazioni della storia l'uno c'è sempre stato, la maggior parte non contiene lo zero e solamente la nostra contiene l'infinito.

Senza l'uno non esiste il numero. Tutto inizia dall'esistenza.

Popolazioni geograficamente molto distanti hanno "inventato" il loro zero posizionale, una grande invenzione che permetteva di scrivere numeri molto grandi. Ma la vera svolta nella matematica è stata l'introduzione delle numerazioni posizionali con lo zero al centro. Le numerazioni posizionali permettono una matematica veloce e rapida e semplificano notevolmente le operazioni matematiche. Il numero zero apre completamente gli orizzonti permettendo di esprimere in modo facile delle assenze di quantità, i numeri negativi e permettendo di far collaborare in un calcolo solo sia le quantità positive che le negative.

Il fatto che siano stati gli Indiani a metabolizzare per primi il concetto di "zero" al centro della matematica è molto significativo. E non a caso lo zero, introdotto in Europa nel XIII sec. d.C. ha incontrato nella mentalità di allora parecchie resistenze anche da parte della chiesa.

Concepire una numerazione che riesce ad esprimere non solo di quello che fisicamente c'è ma anche di quello che non c'è, implica uno scatto di pensiero ulteriore, che non è solo un passaggio verso l'astrazione. Se infatti possiamo dire che il progressivo uso dei numeri nella storia umana ha portato il pensiero matematico verso una progressiva astrazione dal concreto dell'oggetto al numero in sé, i numeri negativi portano anche una qualità diversa, permettendo di esprimere nei confronti dei numeri positivi delle coppie "ideali" contrapposte mancanza vs presenza, leggerezza vs peso costruzione vs distruzione. Non solo ma al centro di tutto, al limite fra queste due qualità troviamo un numero, lo zero, che è come dire nulla e che invece cambia tutto.

Nella religione indiana, svuotare la mente, non pensare nulla, ci unisce al cosmo e alle sfere celesti. È perciò chiaro che per gli indiani il passo di accettazione dello "zero", del nulla, è molto più avvantaggiato che da popolazioni che marciano molto della paura dell'oblio.

Una domanda che possiamo porci è questa (una domanda che molti ancora oggi si pongono) ci serve questa qualità? Ci serve lo zero?

Osservazione Off-Topic:

L'esistenza dello "zero" ha creato un grande problema esistenziale alle popolazioni che dovevano festeggiare il capodanno del nuovo millennio. Infatti quando si è cominciato a contare gli anni, non esisteva lo zero. Gesù nacque nell'anno uno. Usando questa logica il capodanno del nuovo millennio doveva essere festeggiato tra il 2000 e il 2001, ma nella matematica odierna, lo zero c'è. Quindi viene logico pensare che il capodanno sia tra il 1999 e il 2000, ossia nel cambio di posizione delle cifre. Il problema è che si è cambiato modo di contare durante la conta.

Definizioni Matematiche e il concetto di Limite

A livello matematico possiamo dire che la numerazione si costruisce definendo il concetto di "successivo", ossia definendo la somma di "uno"

il successivo: $n=n+1$

Definiamo anche i numeri pari e i numeri dispari

pari $n=2n$

dispari $n=2n+1$

Questo significa che un numero pari si può costruire moltiplicando 2 ad un altro numero e un numero dispari si costruisce sommando uno a un numero pari.

Osserviamo adesso che per l'addizione (o la sottrazione), lo "zero" è un numero neutro.

$$n+0=n$$

$$n-0=n$$

Mentre "uno" è l'elemento neutro della moltiplicazione/divisione

$$n*1=n$$

$$n/1=n$$

Lo "zero" è un grande problema per moltiplicazioni e divisioni

$$n*0=0 \quad (\text{annulla l'operazione, } n \text{ perde la sua importanza)}$$

$$n/0=? \quad (\text{non è possibile!})$$

Questa impossibilità ha fatto nascere il concetto di "limite"

Il limite è quel numero, tanto piccolo quanto è la nostra immaginazione, che tende a zero. Esiste il limite positivo 0^+ e il limite negativo 0^-

$$n/0^+=+\infty$$

$$n/0^-=-\infty$$

A questa formula ci possiamo arrivare ripercorrendo il pensiero di Baskara (India), nel XII secolo. Lui ragionava così: (non aveva il concetto di limite)

$$1/0,1=10$$

$$1/0,001=1.000$$

$$1/0,000001=1.000.000$$

quindi diviso "zero" = $+\infty$

Se però dividiamo per numeri negativi, si ottiene l'opposto:

$$1/-0,1=-10$$

$$1/-0,001=-1.000$$

$$1/-0,000001=-1.000.000$$

quindi diviso "zero" = $-\infty$

Il triangolo di Tartaglia come aiuto ad esercitare l'algebra

Ve lo ricordate tutti il quadrato del binomio?

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

oppure

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Triangolo di Tartaglia

| | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|---|---|
| 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

Questi si risolvono velocemente facendo tutti i passaggi, prendiamo ad esempio:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$$

$$= a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$$

Osserviamo che sia $(a+b)^2$ che $(a-b)^2$ hanno i risultati uguali a eccezione del segno.

Ricordo: $-3a^2$

1. Coefficiente: 3
2. Esponente di a: 2
3. Segno: -

Osserviamo come si comportano i coefficienti dei risultati, gli esponenti di a e di b, e i loro segni, in queste due quadrati del binomio.


$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

1. I coefficienti sono 1 2 1 in entrambe le risoluzioni
2. Gli esponenti di a sono 2 1 0 e gli esponenti di b sono 0 1 2.
3. I segni nel quadrato del binomio a segno negativo, sono alternati.

Ricordo: in algebra è sempre possibile moltiplicare qualcosa per 1, e quindi anche per b^0

Scomponiamo meglio il risultato, mostrando ciò che in matematica viene solitamente semplificato

$$1a^2 b^0 + 2a^1 b^1 + 1a^0 b^2$$


Gli esponenti di a diminuiscono e quelli di b aumentano formando una croce e incontrandosi nel mezzo, il loro valore minimo è 0 il loro valore massimo è 2 cioè l'esponente dell'operazione.

Cosa centra tutto questo con il triangolo di tartaglia?

Semplicemente dà un significato ai coefficienti 1 2 1.

I coefficienti di un quadrato di un binomio sono sempre e solo 1 2 1.

Il triangolo di tartaglia ci permette di ricordare i coefficienti dei binomi che sono elevati a potenze maggiori di 2. Ad esempio nel cubo del binomio i coefficienti sono 1 3 3 1, nel binomio elevato alla quarta abbiamo 1 4 6 4 1, in quello alla quinta 1 5 10 10 5 1.

Stiamo dando i numeri?

No semplicemente stiamo elencando le linee del triangolo di Tartaglia.

| Triangolo di Tartaglia | | | | | | | | |
|------------------------|---|---|----|----|----|----|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

Quindi per risolvere velocemente una elevazione a potenza di un binomio, serve di ricordare e applicare tre regole:

1. I coefficienti vengono presi dal triangolo di tartaglia
2. Gli esponenti sono incrementali, a partire da 0 fino all'esponente e partono in direzioni opposte b^n verso destra e a^m verso sinistra.
3. Se è un binomio con segno negativo, i segni sono alternati e se l'esponente è pari, il primo segno è pari altrimenti si inizia con il segno negativo.

Facciamo un esercizio, senza risolvere alla classica maniera, ma usando queste regole. Risolvere $(a+b)^6$ e $(a-b)^6$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

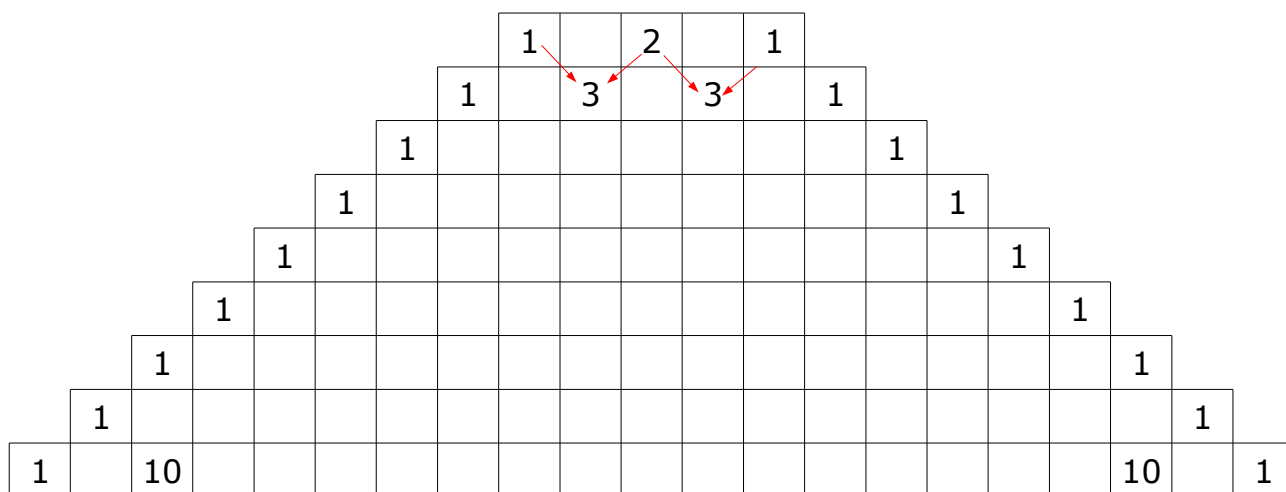
$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

Facile no?

Per i più volenterosi, fate le prova e risolvetevi l'espressione algebrica senza usare queste regole.

Qualcuno di voi si sarà posto la domanda: Come si costruisce questo triangolo?

La regola di base è semplice: Presi due numeri uno accanto all'altro, si sommano tra loro e si scrive il risultato sulla riga successiva.



Se avete realizzato tutto il triangolo, potete adesso risolvere questo esercizio:

$$(a-b)^{10} =$$